OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 08 FEBRUARIE 2025

Clasa a VI-a

Problema 1. a) Calculați suma divizorilor lui 2025 care nu sunt pătrate perfecte.

b) Determinați toate numerele naturale care au patru divizori și sunt cu 13 mai mici decât suma divizorilor lor.

Soluție

a) Divizorii lui 2025 care nu sunt pătrate perfecte 3, 5, 15, 27, 45, 75, 135, 405, 675 ....2p

Suma este 1385 …….. ....1p

b) Dacă numărul are patru divizori atunci este de forma n^3 sau $n \cdot p$ unde n, p sunt numere prime diferite ……………………………..2p

Dacă numărul este de forma n^3 atunci obținem $1+n+n^2+n^3=n^3+13 \Rightarrow n=3$ și numărul căutat este 27 ………………………………………………………………………1p

Dacă numărul este de forma $n \cdot p$ atunci obținem $1+n+p+n \cdot p=n \cdot p+13 \Rightarrow n+p=12$ $\Rightarrow n=5, p=7$ și numărul căutat este 35 ....1p

Problema 2. Se consideră o mulțime mulțime A de numere naturale care are următoarele proprietăți:

i) $36 \in A$ și $26 \notin A$

ii) dacă $x \in A$, atunci $3x+81 \in A$

iii) dacă $3y-2 \in A$, atunci $y \in A$.

a) Arătați că $2025 \in A$.

Demonstrați că $2026 \notin A$.

Soluție

a) $36 \in A \Rightarrow 3 \cdot 36+81=189 \in A$ (proprietatea 2) ……………………………………….2p
$189 \in A \Rightarrow 3 \cdot 189+81=648 \in A$ ……………………………………………………….1p
$648 \in A \Rightarrow 3 \cdot 648+81=2025 \in A$ ……………………………………………………1p

b) Presupunem că $2026 \in A$. Aplicăm succesiv proprietatea 3 după cum urmează:

$2026 \in A \Rightarrow 3 \cdot 676-2 \in A \Rightarrow 676 \in A$ ………………………………………………….2p
$676 \in A \Rightarrow 3 \cdot 226-2 \in A \Rightarrow 226 \in A$
$226 \in A \Rightarrow 3 \cdot 76-2 \in A \Rightarrow 76 \in A$
$76 \in A \Rightarrow 3 \cdot 26-2 \in A \Rightarrow 26 \in A$, contradicție cu proprietatea 1. …………………...1p

Problema 3. Ana construiește n unghiuri în jurul unui punct pe care le numerotează $\hat{1}$, $\hat{2}$, …, $\hat{n}$. Dacă unghiurile desenate îndeplinesc următoarele condiții:

i) măsurile lor în grade se exprimă prin numere naturale
ii) unghiurile numerotate cu numere impare sunt congruente
iii) unghiurile numerotate cu numere pare sunt congruente
iv) diferența măsurilor oricăror două unghiuri adiacente este de $10°$

atunci:

a) Arătați că n nu poate fi egal cu 5.
b) Pentru $n=6$ arătați că toate unghiurile sunt ascuțite și nu există nicio pereche de unghiuri opuse la vârf.
c) Pentru $n=8$ arătați că oricare două unghiuri adiacente sunt complementare și oricare patru unghiuri adiacente au suma măsurilor $180°$.

Soluție

a) Deoarece diferența măsurilor a oricăror două unghiuri adiacente trebuie să fie aceeași, măsurile unghiurilor sunt $a, a+10°, a, a+10°, ...$, deci numărul unghiurilor trebuie să fie un număr par. ……………………………………………………………………………**3p**
b) Pentru $n=6$ avem $a+a+10°+a+a+10°+a+a+10°=360° \Rightarrow a=55°$.
Măsurile unghiurilor sunt de $55°$ și respectiv de $65°$ și suma a oricăror trei unghiuri adiacente nu este egală cu $180°$. ……………………………………………………………………**2p**
c) Pentru $n=8$ avem $a+a+10°+a+a+10°+a+a+10°+a+a+10°=360° \Rightarrow a=40°$.
Măsurile unghiurilor sunt de $40°$ și respectiv de $50°$. Suma a oricăror două unghiuri adiacente este egală cu $90°$ și suma a oricăror patru unghiuri adiacente este de $180°$. …**2p**

Problema 4. În jurul punctului O considerăm unghiurile $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle DOE$, $\measuredangle EOF$ și $\measuredangle FOA$, având măsurile *b, c, d, e, f* respectiv *a*, exprimate în grade, cu *a, b, c, d, e, f* numere naturale nenule. Se știe că numerele *a, b, c* sunt direct proporționale cu numerele 4, 5, 6, iar numerele *c, d, e* sunt invers proporționale cu numerele 4, 5, 6. Determinați care este cea mai mică valoare posibilă pentru *f.*

GM 6-7-8/ 2024

Soluție

Unghiurile date fiind unghiuri în jurul unui punct, suma lor este de $360°$. …………………… **1p**

$\{a,b,c\}\, d.p.\{4,5,6\} \Leftrightarrow \frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$. Deci $a=\frac{4c}{6}, b=\frac{5c}{6}$ ………………………………………… **1p**

$\{c,d,e\}\, i.p.\{4,5,6\} \Leftrightarrow 4c=5d=6e$. Deci $d=\frac{4c}{5}, e=\frac{4c}{6}$ …………………………………………..**1p**

$a+b+c+d+e+f=360° \Rightarrow \frac{4c}{6}+\frac{5c}{6}+c+\frac{4c}{5}+\frac{4c}{6}+f=360° \Rightarrow \frac{119c}{30}+f=360° \Rightarrow$ ………..**1p**

$c=\frac{30\cdot(360°-f)}{119} \in \mathbb{N}$ ……………………………………………………………………**1p**

Obținem $(360°-f)\,\vdots\,119$ ………………………………………………………………. **1p**

Deci valoarea minimă a lui f este $3°$. ……………………………………………………………**1p**