OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 08 FEBRUARIE 2025

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{\overline{acd}}+\sqrt{\overline{ad}}=\overline{ab}$.

b) Considerăm numărul real $x=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2023}}$. Calculați $[x]$.

Notația $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Soluție

a) $\sqrt{\overline{acd}}+\sqrt{\overline{ad}}\in\mathbb{N}\Rightarrow\overline{acd}=k^2,\overline{ad}=p^2$ 1p

$\sqrt{\overline{acd}}\le 31$, $\sqrt{\overline{ad}}\le 9\Rightarrow\overline{ab}\le 40\Rightarrow\overline{ad}\in\{16,25,36\}$

$a=1,d=6\Rightarrow c=9$, $\sqrt{196}+\sqrt{16}=14+4=18\Rightarrow\overline{abcd}=1896$

$a=2,d=5\Rightarrow c=2$, $\sqrt{225}+\sqrt{25}=15+5=20\Rightarrow\overline{abcd}=2025$

$a=3,d=6\Rightarrow\overline{3c6}\ne k^2$. 2p

b) $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{2}$ 1p

$x=\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{45-\sqrt{3}}{2}$ 2p

$1<\sqrt{3}<2\Rightarrow\frac{43}{2}<x<\frac{44}{2}\Rightarrow[x]=21$ 1p

Problema 2. Pe o tablă din clasă, la început, este scris tripletul $\left(\sqrt{8},\sqrt{50},\sqrt{128}\right)$. La un *pas*, dacă pe tablă este scris tripletul (a,b,c), Dan șterge acest triplet și scrie în locul lui tripletul $\left(\frac{b+2c}{3},\frac{c+2a}{3},\frac{a+2b}{3}\right)$. Acest procedeu poate continua în oricât de mulți *pași*.

a) Ce triplet se va obține după primii doi *pași* în care se aplică acest procedeu?
b) Stabiliți dacă, după mai mulți *pași* de aplicare a procedeului, Dan poate obține tripletul $\left(\sqrt{2},\sqrt{98},\sqrt{162}\right)$.

Soluție

a) Tripletul inițial $\left(2\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 8\sqrt{2}\right)$ 1p

$\xrightarrow{pas\ 1}\left(7\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}\right)$..1p

$\xrightarrow{pas\ 2}\left(4\sqrt{2},\ 6\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}\right)$..1p

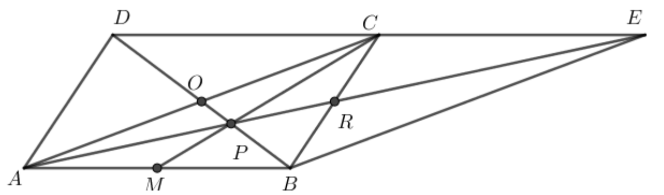
b) Observăm că $\frac{b+2c}{3}+\frac{c+2a}{3}+\frac{a+2b}{3}=\frac{3a+3b+3c}{3}=a+b+c$ 1p

Procedeul păstrează invariantă suma celor trei termeni ai tripletului. 1p

$\sqrt{8}+\sqrt{50}+\sqrt{128}=15\sqrt{2}$, iar $\sqrt{2}+\sqrt{98}+\sqrt{162}=17\sqrt{2}$. Deci nu este posibil. 2p

Problema 3. Fie *ABCD* un paralelogram, iar $AC\cap BD=\{O\}$. Punctul *M* este mijlocul laturii *AB*, $CM \cap OB=\{P\}$ și $AP \cap CD=\{E\}$. Dacă aria paralelogramului *ABCD*=72 cm^2, determină aria patrulaterului *ABED*.

Soluție

<table>
<tr><td>Notăm AP∩BC={R}
În Δ ABC, CM și BO sunt mediane,
BO∩CM={P}⇒
P=centrul de greutate al ΔABC.................1p</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">P∈AR ⇒ AR= mediana din A în ΔABC ⇒ R este mijlocul lui BC..................1p
Din (ULU) ΔABR≡ΔECR⇒ AB=EC 2p
AB || CE, AB=CE⇒ ABEC paralelogram 1p
$A_{ABC}=\frac{A_{ABCD}}{2}=36\ cm^2$, $A_{ABC}=A_{ECB}$ ....1p; $A_{ABED}=A_{ABCD}+A_{ECB}=108\ cm^2$ ....1p</td></tr>
</table>

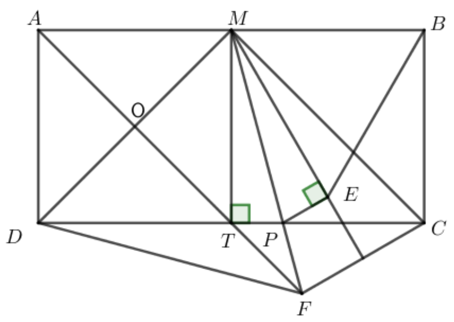
Problema 4. Fie *ABCD* un dreptunghi cu *AB*=2·*AD*. Notăm cu *M* mijlocul laturii *AB*. De aceeași parte cu punctul C față de dreapta *AB* construim triunghiurile echilaterale *BME*, respectiv *MDF*. Fie $DC \cap MF=\{P\}$. Fie T mijlocul laturii CD.

a) Arătați că A, T și F sunt puncte coliniare.

b) Arătați că $PE \parallel FC$.

Supliment GM 9/ 2024-text modificat

Soluție

<table>
<tr><td>a) ABCD dreptunghi, AB=2·AD=2·AM, DC=2· DT ⇒
AMTD pătrat și MBCT pătrat................................1p
Fie O mijlocul lui DM ⇒TO ⊥ DM, FO⊥DM , O∈AT,
F, T, A coliniare 1p
b) Dacă ΔMEB echilateral ⇒∢TME =90° - 60° =30°,
MT=MB=ME , ∢TMF =60° - 45° =15° , ∢EMF =15°,
ΔMTP≡ΔMEP (LUL) 1p
∢MEP ≡ ∢MTP , ∢MEP = 90° 1p
ΔDMC dr. isoscel ⇒ DM=MC, DM=MF ⇒
ΔMFC isoscel cu MF=MC, ∢CMF =45° -15° =30° 1p
∢FME =15° ⇒(ME bisectoarea ∢FMC ⇒ ME⊥FC 1p
ME⊥PE, ME⊥FC ⇒ PE || FC ....1p</td><td>
</td></tr>
</table>