OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 08 FEBRUARIE 2025

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Arătați că 2025 este singurul număr natural divizibil cu 5, de forma $\overline{abcd}$ care verifică proprietatea $\sqrt{\overline{abcd}}=\overline{ab}+\overline{ad}$.

b) Determinați toate numerele naturale divizibile cu 5, de forma $\overline{abcd}$, având proprietatea: $\sqrt{\overline{abcd}}=\overline{ab}+\overline{cd}$.

Soluție

a) $\sqrt{2025}=20+25$	1p
Din $\overline{abcd}$ divizibil cu 5, rezultă că $d\in\{0,5\}$. Dacă $d=0$ și $\overline{abcd}$ pătrat perfect, rezultă că și $c=0$. Avem $\overline{ab00}=\left(\overline{ab}+\overline{a0}\right)^2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow 1000\cdot a=400\cdot a^2$ contradicție	1p
Dacă $d=5$ și $\overline{abcd}$ pătrat perfect, rezultă că $c=2$ (Dacă un număr natural este divizibil cu 5, atunci pătratul său este divizibil cu 25 și are ultimele două cifre 25. $(10\overline{x}+5)^2=100\overline{x}^2+100\overline{x}+25=\overline{.....25}$). Avem $\overline{ab25}=(\overline{ab}+\overline{a5})^2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow 1000\cdot a+25=400\cdot a^2+200\cdot a+25 \Rightarrow a=2$ Deci 2025 este singurul număr care verifică condițiile din enunț.	2p
Dacă $d=0$ și $\overline{abcd}$ pătrat perfect, rezultă că și $c=0$, contradicție	1p
Dacă $d=5$ și $\overline{abcd}$ pătrat perfect, rezultă că $c=2$ Avem $\overline{ab25}=(\overline{ab}+25)^2 \Leftrightarrow 100\cdot\overline{ab}+25=\overline{ab}^2+50\cdot\overline{ab}+625 \Leftrightarrow \overline{ab}^2-50\cdot\overline{ab}+600=0 \Leftrightarrow (\overline{ab}-30)(\overline{ab}-20)=0$ Deci $\overline{ab}=30$ sau $\overline{ab}=20$. Numerele căutate sunt 2025 și 3025.	2p

Problema 2. Dacă x este numărul real din intervalul $[-2,2]$, pentru care $\dfrac{\lvert 2x-5\rvert}{\lvert x+2\rvert+\lvert x-2\rvert}=2,25$, iar numerele reale y și z verifică egalitatea $y^2+10y+2z-4\sqrt{2z+3}=-32$, calculați $\left(y-x+4y\right)^{2025}$.

Soluție:

$x\in[-2,2] \Leftrightarrow -2\le x\le 2 \Rightarrow x+2\ge 0$ și $x-2\le 0$; $\lvert x+2\rvert+\lvert x-2\rvert=x+2+2-x=4$	1p
$\dfrac{\lvert 2x-5\rvert}{\lvert x+2\rvert+\lvert x-2\rvert}=2,25 \Rightarrow \dfrac{\lvert 2x-5\rvert}{4}=2,25 \Rightarrow \lvert 2x-5\rvert=9$; $x\in[-2,2] \Rightarrow x=-2$	1p
$y^2+10y+2z-4\sqrt{2z+3}=-32 \Rightarrow \left(y^2+10y+25\right)+\left(2z+3-4\sqrt{2z+3}+4\right)=0 \Rightarrow$	2p

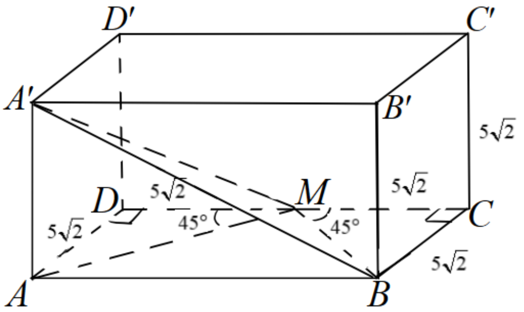
$(y+5)^2+\left(\sqrt{2z+3}-2\right)^2=0 \Rightarrow y+5=0$ și $\sqrt{2z+3}-2=0$; se obțin $y=-5$ și $z=\dfrac{1}{2}$	2p
$(y-x+4z)^{2025}=(-5+2+2)^{2025}=-1$	1p

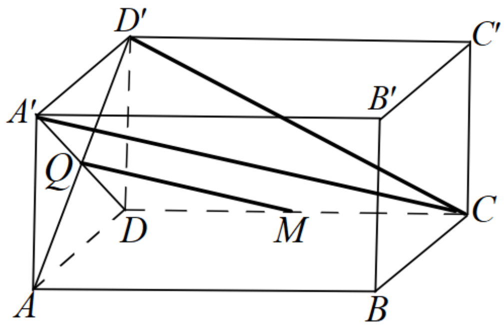
Problema 3. Paralelipipedul deptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB=2BC=2CC'=10\sqrt{2}$ cm, iar punctul M este mijlocul muchiei CD.

a) Arătați că aria triunghiului $A'MB$ este mai mare decât 60 cm^2.

b) Aflați tangenta unghiului dreptelor QM și $D'C$, unde Q este mijlocul segmentului $D'A$.

Soluție:

a) 

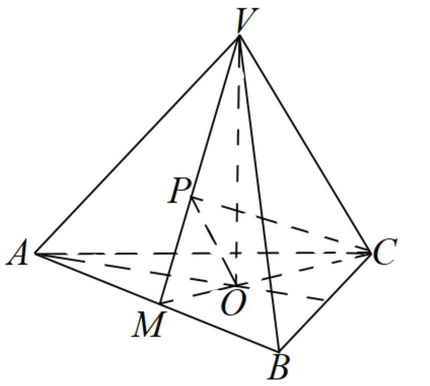
b) 

a)	$DA=DM=5\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle ADM=90^\circ \Rightarrow \Delta ADM$ dr. isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DMA=45^\circ$ $CM=CB=5\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle BCM=90^\circ \Rightarrow \Delta BCM$ dr. isoscel $\Rightarrow \sphericalangle CMB=45^\circ$ $\sphericalangle AMB=180^\circ-(\sphericalangle DMA+\sphericalangle CMB)=90^\circ \Rightarrow AM\perp MB$	1p
	$\left.\begin{array}{l} A'A\perp(ABC) \\ AM\perp MB \\ AM, MB\subset(ABC)\end{array}\right) \xrightarrow{T3\perp} A'M\perp MB \Rightarrow \Delta A'MB$ este dr. în M	1p
	$AM=BM=10$ cm; cu TP în $\Delta A'AM$ se obține $A'M=5\sqrt{6}$ cm $A_{\Delta A'MB}=\dfrac{A'M\cdot MB}{2}=25\sqrt{6}$ cm^2	1p
	$A_{\Delta A'MB}>60 \Leftrightarrow 25\sqrt{6}>60 \Leftrightarrow 5\sqrt{6}>12 \Leftrightarrow \sqrt{150}>\sqrt{144}\,(A)$	1p
b)	$ADD'A'$ pătrat și Q este mijlocul segmentului $D'A \Rightarrow$ Q este mijlocul segmentului $A'D$; cum M este mijlocul segmentului $CD \Rightarrow$ QM este linie mijlocie în triunghiul $A'DC \Rightarrow QM \parallel A'C \Rightarrow \sphericalangle(QM, D'C)=\sphericalangle(A'C, D'C)=\sphericalangle A'CD'$	1p
	$\left.\begin{array}{l} A'D'\perp D'C' \\ A'D'\perp D'D \\ D'C'\cap D'D=\{D'\} \\ D'C', D'D\subset(D'DC)\end{array}\right) \Rightarrow A'D'\perp(D'DC)$ $A'D'\perp(D'DC)$ și $D'C\subset(D'DC) \Rightarrow A'D'\perp D'C \Rightarrow \Delta A'D'C$ dr în D'	1p
	Cu TP în $\Delta D'C'C$ se obține $D'C=5\sqrt{10}$ cm $tg(\sphericalangle A'CD')=\dfrac{A'D'}{D'C}=\dfrac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$	1p

Problema 4. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V și O centrul bazei ABC. Fie M mijlocul muchiei AB și CP bisectoarea unghiului $\sphericalangle MCV$, $P \in VM$. Arătați că $OP = 2OM$ dacă și numai dacă $VA = AB\sqrt{3}$.

S.G.M. nr. 9 / 2024

Soluție:



Notăm lungimea seg OM cu $x \Rightarrow CM = 3x,\ OC = 2x$ și $AB = 2\sqrt{3}x$	1p
„$\Rightarrow$" O centrul bazei $\Rightarrow OC = 2OM$, cum $OP = 2OM \Rightarrow OP = OC = 2x \Rightarrow \Delta COP$ este isoscel $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sphericalangle OPC \equiv \sphericalangle OCP \\ CP \text{ bisectoarea unghiului } \sphericalangle MCV \Rightarrow \sphericalangle PCV \equiv \sphericalangle OCP \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle PCV \equiv \sphericalangle OPC$, $\sphericalangle PCV$ și $\sphericalangle OPC$ sunt unghiuri alterne interne formate de OP și CV cu secanta $CP \Rightarrow OP \parallel CV$	1p
$\left.\begin{array}{r} OP \parallel CV \xrightarrow{TFA} \Delta MOP \sim \Delta MCV \Rightarrow \dfrac{OP}{CV} = \dfrac{MO}{MC} \\ \dfrac{MO}{MC} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{OP}{CV} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ $\dfrac{2x}{CV} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow CV = 6x \Rightarrow VA = 6x$	1p
$AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x \cdot \sqrt{3} = 6x = VA$	1p
„$\Leftarrow$" $AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3}x \cdot \sqrt{3} = 6x = VA = VC$	1p
$\left.\begin{array}{r} \Delta VMC : CP \text{ bis. unghiului } \sphericalangle MCV \xrightarrow{T.bis} \dfrac{PM}{PV} = \dfrac{CM}{CV} \Rightarrow \dfrac{PM}{PV} = \dfrac{3x}{6x} \Rightarrow \dfrac{PM}{PV} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{PM}{PV} = \dfrac{OM}{OC} \xrightarrow{R.T.Thales} \Rightarrow OP \parallel CV$	1p
$\left.\begin{array}{r} OP \parallel CV \xrightarrow{TFA} \Delta MOP \sim \Delta MCV \Rightarrow \dfrac{OP}{CV} = \dfrac{MO}{MC} \\ \dfrac{MO}{MC} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{OP}{CV} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{OP}{6x} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow OP = 2x = 2OM$	1p