Examenul național de bacalaureat 2025 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 2024$ și rația $r = -3$. Determinați cel mai mare număr natural m pentru care $a_m > 0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 2^x$. Arătați că dreapta de ecuație $d: x - y = 0$ ***nu*** intersectează graficul funcției *f*.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 3^x = 3^x + 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr $\overline{abc}$ din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă $a < b < c$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v} = (m+3)\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{u} = (3-m)\vec{i} + m\vec{j}$ unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea reală a lui m pentru care vectorii $\vec{v} + \vec{u}$ și $\vec{v} - \vec{u}$ sunt ortogonali.

5p **6.** Catetele triunghiului dreptunghic *ABC* sunt $AB = 12$ și $AC = 5$. Arătați că $4R = 13r$, unde *R* este raza cercului circumscris triunghiului și, respectiv *r* este raza cercului înscris în triunghiul *ABC*.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & a+1 & b \\ a^2 & a^2+1 & b^2 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ ax + (a+1)y + bz = b-1 \\ a^2x + (a^2+1)y + b^2z = b^2 - 1 \end{cases}$, unde $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2,1)) = 0$.

5p **b)** Arătați că $rangA(a,b) \geq 2$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

5p **c)** Arătați că sistemul are cel puțin o soluție $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

2. Pe mulțimea $M = (1,+\infty)$ se definește aplicația $x \circ y = \dfrac{xy-1}{x+y-2}$.

5p **a)** Arătați că $2024 \circ 2024 = \dfrac{2025}{2}$.

5p **b)** Arătați că $x \circ y \in M, \forall x, y \in M$.

5p **c)** Arătați că pentru orice număr natural $n \in M$ există numerele naturale *m* și *p*, $m, p \in M$ pentru care $m \circ p = n$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to[0,+\infty),\ f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+x-1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}, \forall x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția *f* este bijectivă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$,

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} ax+a, & x<0 \\ xe^x+1, & x\geq 0\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ arătați că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

5p **c)** Determinați o primitivă *G* a funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(\ln x)$ cu proprietatea $G(e)=0$.

Examenul național de bacalaureat 2025 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_m = 2024 + (m-1)(-3) > 0 \Rightarrow m < \frac{2027}{3}$	**3p**
	Soluție $m = 675$	**2p**
2.	Dreapta intersectează graficul funcției dacă sistemul $\begin{cases} f(x) = y \\ x - y = 0 \end{cases}$ are soluție.	**2p**
	Deoarece $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ecuația $f(x) = x$ nu are soluții reale.	**3p**
3.	Notând $3^x = y$ obținem ecuația $y^2 - 2y - 3 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 3$, $y_2 = -1$.	**3p**
	$x = 1$ este soluție.	**2p**
4.	Numărul cazurilor favorabile este egal cu $C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$	**3p**
	Numărul cazurilor posibile este egal cu 900.	**1p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{84}{900} = \frac{7}{75}$	**1p**
5.	$\vec{v} + \vec{u} = 6\vec{i} + (m+2)\vec{j}$ și $\vec{v} - \vec{u} = 2m\vec{i} + (2-m)\vec{j}$	**2p**
	$(\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 12m + 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m_{1,2} = 6 \pm 2\sqrt{10}$	**3p**
6.	$BC = \sqrt{144 + 25} = 13 \Rightarrow R = \frac{BC}{2} = \frac{13}{2}$	**2p**
	$A_{\triangle ABC} = 30$ și $P_{\triangle ABC} = 30 \Rightarrow p = 15 \Rightarrow r = \frac{A_{\triangle ABC}}{p} = 2$	**2p**
	finalizare	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\det(A(2,1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 + 8 - 12 - 5 - 4 =$	**3p**
	finalizare	**2p**
	b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a \neq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$	**3p**
	finalizare	**2p**

	c) Observăm că $x=1$, $y=-1$ și $z=1$ verifică ecuațiile sistemului finalizare	**3p** **2p**
2.	**a)** $2024\circ 2024=\dfrac{2024^2-1}{2024+2024-2}=\dfrac{(2024-1)(2024+1)}{2(2024-1)}$ finalizare	**3p** **2p**
	b) $x>1,\quad y>1\Rightarrow x+y-2>0$ $\dfrac{xy-1}{x+y-2}>1\Leftrightarrow xy-1>x+y-2\Leftrightarrow (x-1)(y-1)>0$	**2p** **3p**
	c) $m\circ p=n\Leftrightarrow \dfrac{mp-1}{m+p-2}=n\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{m-1}+\dfrac{1}{p-1}}=n\Leftrightarrow \dfrac{1}{m-1}+\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{1}{n-1}$ Există $m=p=2n-1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $f'(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+x\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}\cdot\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x}{(x+1)^2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}=$ Obținerea rezultatului	**3p** **2p**
	b) $f'(x)>0,\forall x\in(1,\infty)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[1,\infty)\Rightarrow f$ injectivă $f(1)=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$. Imaginea funcției este egală cu codomeniul, deci funcția este surjectivă	**3p** **2p**
	c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}}=$ $=e^{-1}$	**3p** **2p**
2.	**a)** $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=1$, $f(0)=1$ f continuă pe domeniul de definiție, rezultă că f admite primitive	**3p** **2p**
	b) F o primitivă oarecare, F derivabilă și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Avem $f(x)>0,\forall x\in[0,+\infty)$ finalizare	**3p** **2p**
	c) $\int(x\ln x+1)dx=x+\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$ Determinarea primitivei	**3p** **2p**