**Examenul național de bacalaureat – simulare 19.12.2023**
**Proba E. c)**
**Matematică M_șt-nat**

**Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** 1. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi. Știind că $b_3 = 2\sqrt{3}$ și $b_5 = 6$. Arătați că $b_1$ este număr rational.

**5p** 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-x^2$. Arătați că dreapta $d: x-y+1=0$ este tangentă la graficul funcției f.

**5p** 3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $4^{x^2}-16^{x+1}=0$.

**5p** 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să **nu** fie divizibil cu 15.

**5p** 5. Se consideră punctele $A(-1,-3)$, $B(7,1)$ și $M(x,y)$ unde $x,y\in\mathbb{R}$. Determinați numerele reale $x,y$ pentru care $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC$ cu $m(\hat{A})=90^\circ$ și $AB=AC\sqrt{3}$. Arătați că $BC=2AC$ și $m(\hat{A})=3\cdot m(\hat{B})$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ a\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

**5p** a) Arătați că $\det(A(1))=2$.

**5p** b)Arătați că există un număr real a pentru care
$\det\left[(I_3+A(a))(I_3-A(-a))\right]=\det\left[(I_3-A(a))(I_3+A(-a))\right]$.

**5p** c)Determinați matricea $X\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $A(a)\cdot X=B$, $a\in\mathbb{R}^*$.

2.Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$x\circ y=10(x+y)-xy-90$.

**5p** a)Arătați că $(-10)\circ 0\circ 10=10$.

**5p** b)Determinați numerele întregi $x$ pentru care $(-x)\circ x\leq x$.

**5p** c)Arătați că $m=n=p$ știind că $m\circ m+n\circ n+p\circ p=m\circ n+n\circ p+p\circ m$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(3,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$.

**5p** a)Arătați că $f'(x)=\dfrac{-2x^2+10x-13}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$.

**5p** b)Determinați ecuația asimptotei spre $\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** c)Arătați că $f'(x)<f'(y)$ pentru orice $x,y\in(3,\infty)$ cu $x<y$.

2.Se consideră funcțiile $f,F:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^2\cdot e^x$ și $F(x)=\dfrac{xe^x}{x+4}+2$

**5p** a)Arătați că $\int_0^1 e^{-x}(x+4)^2 f(x)dx=\dfrac{19}{3}$.

**5p** b)Arătați că $F$ este o primitivă a lui $f$ pe intervalul $[0,\infty)$.

**5p** c) Determinați o primitivă $G$ a funcției $g:[0,\infty)\to\mathbb{R},g(x)=(x+4)^2 f(x)$ cu proprietatea $G(0)=0$.

**Examenul național de bacalaureat – simulare 19.12.2023**
**Proba E. c)**
**Matematică M_șt-nat**
**BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE**

**Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii**

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $b_1 \cdot b_5 = b_3^2 \Rightarrow b_1 = \dfrac{b_3^2}{b_5}$ | **3p** |
| | $b_1 = 2 \in \mathbb{Q}$ | **2p** |
| **2.** | Sistemul $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x+1 \end{cases}$ are o soluție | **3p** |
| | Punctul comun este P(1,2) | **2p** |
| **3.** | Ecuația devine $4^{x^2} = 4^{2x+2} \Leftrightarrow x^2 = 2x+2$ | **3p** |
| | Soluții $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ | **2p** |
| **4.** | Numărul cazurilor posibile = 90 | **2p** |
| | Numărul cazurilor favorabile 90 – 6 = 84 | **2p** |
| | $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{84}{90} = \dfrac{14}{15}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{AM} = (x+1)\vec{i} + (y+3)\vec{j}$, $\overrightarrow{BM} = (x-7)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$ | **3p** |
| | x=3, y=-1 | **2p** |
| **6.** | $tgB = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow B = 30^\circ \Rightarrow A = 3B$ | **3p** |
| | finalizare | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-(-1)$ | **3p** |
| | finalizare | **2p** |
| | **b)** $\det(I_3 + A(a)) = 5(a+1)$, $\det(I_3 - A(a)) = 1-a$ | **2p** |
| | Relația devine $5(a+1)\cdot(1+a) = (1-a)\cdot 5(-a+1)$. Obținem a=0. | **3p** |
| | **c)** Matricea este inversabilă (determinantul este nenul) și $A^{-1}(a) = \dfrac{1}{2a}\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| | Obținem $X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. | **2p** |
| **2.** | a) $x\circ y=10-(x-10)(y-10)$<br>finalizare | **2p**<br>**3p** |
| | **b.** inecuația devine $x^2-x-90\le 0$<br>$x\in\{-9,-8,...,9,10\}$ | **2p**<br>**3p** |
| | **c)** Relația devine<br>$(m-10)^2+(n-10)^2+(p-10)^2=(m-10)(n-10)+(n-10)(p-10)+(p-10)(m-10)$<br>finalizare | **3p**<br><br>**2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | **a)** $f'(x)=\frac{2\left(x^2-5x+6\right)-(2x-5)^2}{\left(x^2-5x+6\right)^2}=$<br>finalizare | **3p**<br>**2p** |
| | **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))=0\in\mathbb{R}$<br>finalizare | **3p**<br>**2p** |
| | **c)** $f''(x)=\frac{(-4x+10)\left(-x^2+5x-7\right)}{\left(x^2-5x+6\right)^3}$<br>$f'$ este crescătoare | **3p**<br>**2p** |
| **2.** | **a)** $\int_0^1(x+2)^2dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3}\right\|_0^1$<br>finalizare | **3p**<br>**2p** |
| | **b)** F este derivabilă și $F'(x)=\frac{x+4-x}{(x+4)^2}e^x+\frac{x}{x+4}e^x$<br>finalizare | **3p**<br>**2p** |
| | **c)** $\int(x+2)^2e^xdx=(x+2)^2e^x-\int 2(x+2)e^xdx=\left(x^2+2x+2\right)e^x+C$<br>Finalizare | **3p**<br>**2p** |