INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CĂLĂRAȘI MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

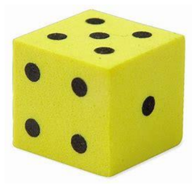
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2025

Clasa a V-a

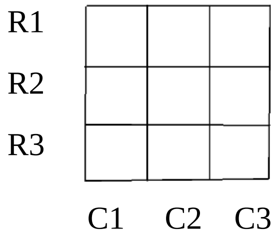
Problema 1.

a) Pe fețele unui cub sunt desenate 1, 2, 3, 4, 5 și 6 puncte. În desenul alăturat sunt prezentate trei dintre fețele cubului. Care este numărul total de puncte desenate pe celelalte trei fețe?



b) Tudor are 9 plăci în formă de pătrat, trei de culoare verde, trei de culoare galbenă și trei de culoare albă. El trebuie să așeze câte una în pătratele de pe o placă mai mare, cum este cea din desenul alăturat, astfel încât fiecare dintre rândurile R1, R2, R3 și coloanele C1, C2, C3 să nu conțină plăci colorate la fel.

În câte moduri diferite se pot așeza cele 9 plăci ? (*justificați răspunsul*)



c) Se pot grupa numerele 18, 27, 22, 32, 16, 13, 15, 24, 8, 25 în perechi astfel încât suma numerelor din fiecare pereche este același număr ? (*justificați răspunsul*)

Problema 2.

a) Arătați că numărul $1^3+6^3+8^3$ este cub perfect.

b) Demonstrați că există trei numere naturale, cuburi perfecte, cu proprietatea că suma lor este 9^{2025}.

Problema 3.

a) Dacă n este o cifră, atunci determinați ultima cifră a numărului $n(n+1)$.(*justificați răspunsul*)

b) Determinați toate numerele naturale de două cifre de forma $\overline{ab}$, cu proprietatea că $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)$ este un număr format din trei cifre consecutive scrise în ordine crescătoare sau descrescătoare.

Problema 4.

Determinați numerele de forma $\overline{abbb}$ care la împărțirea cu 4 dau restul 3 și câtul $\overline{baaa}$.

Succes !

Baremul de notare:

Problema 1. a) 1p, b) 3p, c) 3p; Problema 2 a) 2p, b) 5p; Problema 3. a) 2p, b) 5p; Problema 4. 7p.

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2025

Clasa a V–a

Soluții și baremul de corectare

Problema 1.

a) $2+3+6=11$ **1p**

b) Plăcile pot fi așezate pe primul rând în șase moduri: VGA, VAG, GVA, GAV, AVG, AGV. **1p**

Dacă, de exemplu, pe primul rând sunt așezate plăcile VGA sub placa V poate fi așezată numai o placă i) G sau ii) A.

V	G	A

i) Dacă este așezată o placă G următoarele două plăci așezate sunt A și V, iar ultimul rând trebuie completat AVG, deci există o singură posibilitate de completare. **1p**

V	G	A
G	A	V
A	V	G

ii) Dacă se este așezată o placă A, repetând raționamentul din cazul i) se mai obține încă o posibilitate de completare.

În concluzie cele nouă plăci pot fi așezate în $6\cdot 2=12$ moduri. **1p**

c)

$18+27+22+32+16+13+15+24+8+25=200$ **1p**

$200:5=40$ **1p**

Din $18+22=27+13=32+8=16+24=15+25=40$, rezultă că se pot grupa numerele 18, 27, 22, 32, 16, 13, 15, 24, 8, 25 în perechi astfel încât suma numerelor din fiecare pereche este același număr **1p**

Problema 2.

a) $1^3+6^3+8^3=729$ **1p**

$729=9^3$ **1p**

b) $9^{2025}=9^{2022}\cdot 9^3=9^{2022}\cdot 729=9^{2022}\cdot\left(1^3+6^3+8^3\right)=$ **2p**

$=9^{2022}+9^{2022}\cdot 6^3+9^{2022}\cdot 8^3=$ **1p**

$=\left(9^{674}\right)^3+\left(9^{674}\cdot 6\right)^3+\left(9^{674}\cdot 8\right)^3$ **2p**

Problema 3.

a) Pentru a determina ultima cifră a numărului $n\left(n+1\right)$ este suficient să se determine ultima cifră a numerelor $0\cdot 1=0,\ 1\cdot 2=2,\ 2\cdot 3=6,\ 3\cdot 4=12,\ 4\cdot 5=20,\ 5\cdot 6=30,\ 6\cdot 7=42,\ 7\cdot 8=56,\ 8\cdot 9=72.$ **1p**

Rezultă că ultima cifră a numărului $n\left(n+1\right)$ este $0,\ 2$ sau 6. **1p**

b) Din **a)** rezultă că $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)$ poate fi egal cu 210, 432, 456 sau 876. **1p**

Din $210=14\cdot 15$ și $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)=210$, rezultă $\overline{ab}=14.$ **1p**

Din $20\cdot 21=420<432<462=21\cdot 22$, rezultă că nu există un număr $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)=432.$ **1p**

Din $20\cdot 21=420<456<462=21\cdot 22$, rezultă că nu există un număr $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)=456.$ **1p**

Din $29\cdot 30=870<876<930=30\cdot 31$, rezultă că nu există un număr $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}+1)=876.$ **1p**

Problema 4.

Din teorema împărțirii cu rest rezultă $\overline{abbb} = 4\overline{baaa} + 3$, **1p**

de unde $b = 1$ sau $b = 2$. **2p**

Dacă $b = 1$, atunci $556a = 3892$ și rezultă $a = 7$, deci $\overline{abbb} = 7111$. **2p**

Dacă $b = 2$, atunci $556a = 7781$. Nu există o cifră a cu această proprietate pentru că un număr par nu este egal cu un număr impar. **2p**